Adı Soyadı: 26.01.2020

Numarası

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-I BÜTÜNLEME SINAVI

1) $\left(x^2-2y+x\right)dx+xdy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2) Bir lineer diferansiyel denklem yazarak denklemin genel çözümünü bulunuz.

3) $cx^2+y^2=1$ eğri ailesinin (0,1) noktasından geçen dik yörüngesini bulunuz.

4) $\left(y'\right)^2-2xy'+x^2-y^2=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5) $2x\left(y'\right)^2-2yy'+4=0$ diferansiyel denklemi verilsin.

a) genel çözümünü bulunuz **b)** varsa tekil çözümünü bulunuz **c)** varsa zarfını bulunuz.

CEVAPLAR

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x^2-x}{x}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=-x-1$ lineer diferansiyel denklemdir. $\lambda\left(x\right)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\dfrac{1}{x^2}$ olmak üzere genel çözüm

$$y\frac{1}{x^2}=\int\left(-x-1\right)\frac{1}{x^2}dx+c\Rightarrow y\frac{1}{x^2}=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx+c\Rightarrow y\frac{1}{x^2}=-\ln x+\frac{1}{x}+c$$ olur.

Veya $\left.\begin{array}{l}M\left(x,y\right)=x^2-2y+x\\ N\left(x,y\right)=x\end{array}\right\}M_y=-2\neq N_x=1$ tam diferansiyel denklem olmayıp $\dfrac{M_y-N_x}{N}=-\dfrac{3}{x}$ şeklinde x e bağlı integral çarpanı ile de çözüm bulunabilir.

2) $y'+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$ formundaki denklemlere lineer denklem denir.

$y'+\dfrac{1}{x}y=x-1,\;\; y'+\dfrac{1}{x}y=x^2+1,\;\; y'-xy=x,\;\; y'-(\tan x)y=\dfrac{1}{\cos x}$,.... her biri lineer denklemdir.

$y'+\dfrac{1}{x}y=x-1$ için çözüm bulalım: $\lambda\left(x\right)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$ olmak üzere genel çözüm

$\lambda\left(x\right)y=\int Q\left(x\right)\lambda\left(x\right)dx+c$ olduğundan $xy=\int\left(x-1\right)xdx+c\Rightarrow xy=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+c$ şeklinde genel çözüm bulunur.

3) Önce eğri ailesine karşılık gelen diferansiyel denklemi bulalım: Bir keyfi parametre olduğu için bir kez türev alıp c içermeyen denklem elde etmemiz lazım.

$cx^2+y^2=1\Rightarrow 2cx+2yy'=0\Rightarrow c=-\dfrac{yy'}{x}\Rightarrow x^2\left(-\dfrac{yy'}{x}\right)+y^2=1\Rightarrow -xyy'+y^2=1$ eğri ailesine karşılık gelen diferansiyel denklemdir. Dik yörünge denklemi için diferansiyel denklemde y' yerine $-\dfrac{1}{y'}$ yazılırsa $-xy\left(-\dfrac{1}{y'}\right)+y^2=1\Rightarrow xy+y^2y'=y'\Rightarrow xy=y'\left(1-y^2\right)$ şeklinde dik yörüngelerin diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilen denklemdir.

$xy=\dfrac{dy}{dx}\left(1-y^2\right)\Rightarrow xdx=\dfrac{1-y^2}{y}dy\Rightarrow\dfrac{x^2}{2}=\ln y-\dfrac{y^2}{2}+c$ verilen eğri ailesinin dik yörünge ailesidir. Bu aileden (0,1) noktasından geçeni $x=0, y=1$ için $\dfrac{0^2}{2}=\ln 1-\dfrac{1}{2}+c\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x^2+y^2-1}{2}=\ln y$ olur.

4) $(y')^2-2xy'+x^2-y^2=0$ birinci mertebe yüksek dereceli denklemdir. $y'=p$ dersek

$p^2-2xp+x^2-y^2=0 \Rightarrow (p-x)^2-y^2=0 \Rightarrow (p-x-y)(p-x+y)=0$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. Buradan

* $p-x-y=0 \Rightarrow y'-y=x$ lineer denklemdir, $\lambda(x)=e^{\int -dx}=e^{-x}$ için genel çözümü

$$ye^{-x}=\int xe^{-x}dx+c \Rightarrow ye^{-x}=e^{-x}(-x-1)+c \Rightarrow y=-x-1+e^{x}c \quad \text{olur.}$$

* $p-x+y=0 \Rightarrow y'+y=x$ lineer denklemdir, $\lambda(x)=e^{\int dx}=e^{x}$ için genel çözümü

$$ye^{x}=\int xe^{x}dx+c \Rightarrow ye^{x}=e^{x}(x-1)+c \Rightarrow y=x-1+e^{-x}c \quad \text{olur.}$$

İstenen genel çözüm $\left(y+x+1-ce^{x}\right)\left(y-x+1-ce^{-x}\right)=0$ şeklindedir.

5) $2x(y')^2-2yy'+4=0$ birinci mertebe yüksek dereceli denklemdir. $y'=p$ dersek

$2xp^2-2yp+4=0 \Rightarrow y=xp+\dfrac{2}{p}$ şeklinde Clairaut denklemidir ($y=xp+f(p)$ formundadır). (y ye göre çözülebilen denklemdir.)

a) $p=c$ için $y=xc+\dfrac{2}{c}$ genel çözümdür.

b) $f(p)=\dfrac{2}{p} \Rightarrow f'(p)=-\dfrac{2}{p^2}$ dır.

$$\left.\begin{array}{l} x=-f'(p) \\ y=-pf'(p)+f(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x=\dfrac{2}{p^2} \\ y=-p\left(-\dfrac{2}{p^2}\right)+\dfrac{2}{p}=\dfrac{4}{p} \end{array}\right\} \Rightarrow p=\frac{4}{y} \Rightarrow x=\frac{2}{\left(\frac{4}{y}\right)^2} \Rightarrow 8x=y^2 \qquad \text{p-tekil yeridir.}$$

$f''(p)=\dfrac{4}{p^3}\neq 0$ olduğundan $8x=y^2$ tekil çözümdür (veya $y=\mp\sqrt{8x}$ tekil çözümdür).

c) $8x=y^2$ tekil çözümünü genel çözümde yazarsak yani $x=\dfrac{y^2}{8}$ için

$y=xc+\dfrac{2}{c} \Rightarrow y=\dfrac{y^2}{8}c+\dfrac{2}{c} \Rightarrow 8cy=y^2c^2+16 \Rightarrow y^2c^2-8cy+16=0 \Rightarrow (yc-4)^2=0 \Rightarrow c=\dfrac{4}{y}$ çift dereceden kök olduğu için $8x=y^2$ tekil çözümü $y=xc+\dfrac{2}{c}$ eğri ailesinin zarfı olur.